Devoir n°2

Il est fortement conseillé de lire l'ensemble des énoncés avant de commencer.
Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$

Exercice 1 (5 points)

On considère un réservoir ouvert contenant de l'eau dont la température est initialement égale à 10°C. On souhaite chauffer cette eau à 80°C à l'aide de résistances chauffantes.

Le réservoir est en acier, sa masse est égale à 150 kg, il a une longueur et une largeur égales à 1 m, sa hauteur est égale à 0,7 m. Toutes les parois sont isolées par un isolant (1 K/(m²W)) sauf le dessus pour lequel on prendra 0,01 K/(m²W). La capacité calorifique massique de l'acier est égale à 500 J/(kg.K).

La capacité calorifique de l'eau est égale à 4186 J/(kg.K) et sa masse volumique est égale à 1000 kg/m³.

Rappels :

L'énergie ΔQ nécessaire pour élever d'une température $\Delta\theta$ une masse m d'un corps de capacité calorifique c est donnée par $\Delta Q = mc\Delta\theta$.

La puissance P échangée entre les deux côtés d'une paroi de résistance thermique R_{th} est reliée à la différence de température $\Delta\theta$ par $\Delta\theta = R_{th} P$.

1. Énergie pour l'eau et l'acier du réservoir

   a. Calculer l'énergie nécessaire pour augmenter la température de l'eau contenue dans le réservoir.

Il faut d'abord calculer le volume d'eau puis multiplier par la masse volumique de l'au ce qui donne :

$V_{\text{eau}} = 1\times1\times0{,}7 = 0{,}7\ \mathrm{m}^3$ soit une masse de 700 kg.

Puisque $\Delta Q_{\text{eau}} = mc\Delta\theta$ et qu'il y a 700 kg d'eau alors $\Delta Q_{\text{eau}} = 700\times4186\times(80-10) = 205\ \mathrm{MJ}$

   b. Calculer l'énergie nécessaire pour augmenter la température de l'acier constituant le réservoir.

Il y a 150 kg d'acier ce qui donne $\Delta Q_{\text{acier}} = 150\times500\times(80-10) = 5{,}25\ \mathrm{MJ}$

   c. Déduire de ce qui précède la puissance nécessaire pour chauffer l'ensemble en une heure.

Il faut au total une énergie calorifique égale à $\Delta Q = \Delta Q_{\text{eau}} + \Delta Q_{\text{acier}} = 205 + 5{,}25 \approx 210\ \mathrm{MJ}$. La puissance, l'énergie et le temps sont reliés par $\Delta Q = P.\Delta t$ d'où $P = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{210.10^6}{3600} = 58{,}3\ \mathrm{kW}$ (il faut mettre la durée en secondes).

2. Pertes

   a. Calculer la résistance thermique des parois isolées.

Le coefficient donné correspond à la résistance thermique pour 1 m², pour obtenir la résistance thermique totale il faut multiplier cette valeur par la surface isolée, notée $S_{\text{isolée}}$, soit les quatre côtés et le fond :

$S_{\text{isolée}} = 4\times1\times0{,}7 + 1\times1 = 3{,}8\ \mathrm{m}^2$ et $R_{\text{th isolée}} = 1\times3{,}8 = 3{,}8\ \mathrm{K/W}$

   b. En déduire la puissance correspondant aux pertes par ces parois lorsque l'eau est à 80°C.

D'après la relation $\Delta\theta = R_{th} P$, on obtient $P_{\text{pertes isolées}} = \dfrac{\Delta\theta}{R_{th}} = \dfrac{(80-10)}{3{,}8} = 18{,}4\ \mathrm{W}$

   c. Calculer la résistance thermique de la surface de l'eau (non isolée).

La démarche est identique à celle de la question 2.a soit $S_{\text{pas isolée}}=1\times1=1\ \text{m}^2$ et $R_{\text{th pas isolée}}=1\times0{,}01=0{,}01\ \text{K/W}$

d. En déduire la puissance correspondant aux pertes par cette surface lorsque l'eau est à 80°C.

D'après la relation $\Delta\theta=R_{\text{th}}P$, on obtient $P_{\text{pertes pas isolées}}=\dfrac{\Delta\theta}{R_{\text{th}}}=\dfrac{(80-10)}{0{,}08}=7000\ \text{W}$

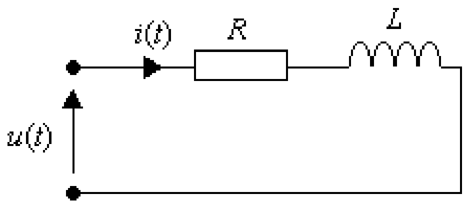
e. Déduire de ce qui précède la résistance équivalente. Le résultat était-il prévisible ?

Tout se passe comme si les deux résistances thermiques étaient en parallèle d'où la résistance équivalente : $R_{\text{theq}}=\dfrac{R_{\text{th isolée}}.R_{\text{th pas isolée}}}{R_{\text{th isolée}}+R_{\text{th pas isolée}}}=\dfrac{3{,}8.0{,}01}{3{,}8+0{,}01}\approx0{,}01\ \text{K/W}$. La résistance thermique des parois isolées est très élevée devant celle du « dessus », la quasi totalité de l'énergie « passe » par la partie non isolée (équivalente à un court-circuit en électricité).

Exercice 2 (6,25 points)

On considère le circuit RL représenté ci-dessous (R = 2 Ω et L = 80 mH) :

1. Établir l'équation différentielle reliant $i(t)$, la dérivée de $i(t)$, R, L et la tension $u(t)$.



D'après la loi des mailles : $u(t)=u_R(t)+u_L(t)$ avec $u_R(t)$ et $u_L(t)$ les tensions aux bornes de la résistance et de l'inductance orientées avec la convention récepteur par rapport au courant $i(t)$.

Lois d'Ohm : $u_R(t)=Ri(t)$ et $u_L(t)=L\dfrac{di(t)}{dt}$

Ce qui donne $u(t)=Ri(t)+L\dfrac{di(t)}{dt}$

2. Déduire de l'équation précédente la constante de temps du circuit.

L'équation précédente est divisée par R soit $\dfrac{u(t)}{R}=i(t)+\dfrac{L}{R}\dfrac{di(t)}{dt}$. Le terme devant $\dfrac{di(t)}{dt}$ correspond à la constante de temps car le terme « devant » $i(t)$ est égal à 1 : $\tau=\dfrac{L}{R}=\dfrac{80.10^{-3}}{2}=40\ \text{ms}$

Pour la suite, on prend τ = 40 ms, l'équation différentielle devient alors $i(t)+\tau\dfrac{di(t)}{dt}=0{,}1u(t)$

Remarque :

Il y a une incohérence avec l'équation précédente, l'équation devrait s'écrire $i(t)+\tau\dfrac{di(t)}{dt}=0{,}5u(t)$

3. Réponse à un échelon

Si $u(t)$ est un échelon ($u(t)$ = 0 si $t<0$ et $u(t)$ = 150 V si $t\geq0$) alors la solution de cette équation est de la forme $i(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}+B$ avec A et B des constantes. Le courant $i(t)$ est nul à l'instant initial (t = 0).

a. Représenter la tension $u(t)$. Déterminer la valeur du courant $i(t)$ en régime permanent.

À partir du comportement physique du circuit : en continu (régime établi), l'inductance se comporte comme un court circuit et la tension égale à 150 V se retrouve aux bornes de la résistance de 2 Ω soit un courant égal à 75 A.

À partir de l'équation différentielle proposée : la réponse en régime établi est une constante donc $\frac{di(t)}{dt}=0$, l'équation différentielle devient $i(t)=0{,}1\,u(t)$ ce qui donne $i(t)=15\ \text{A}$.

Les deux résultats sont différents à cause de l'incohérence entre l'équation proposée et le circuit électrique.

b. Déterminer la constante *B*.

La constante *B* correspond au régime établi soit *B* = 75 (ou *B* = 15) (quand $t\rightarrow\infty$ alors $e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}\rightarrow 0$).

c. Déterminer la constante *A*.

À l'instant *t* = 0 : $i(0)=A\,e^{-\frac{0}{\tau}}+75=0$ soit $A=-75$ ou $i(0)=A\,e^{-\frac{0}{\tau}}+15=0$ soit $A=-15$

Finalement $i(t)=-75\,e^{-\frac{t}{\tau}}+75=75\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ ou $i(t)=-15\,e^{-\frac{t}{\tau}}+15=15\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

4. Réponse à une sinusoïde

La tension *u*(*t*) est une sinusoïde de valeur efficace *U* et de fréquence *f*. Pour déterminer le fonctionnement en régime établi, il est possible de résoudre l'équation différentielle précédente mais il est plus simple d'utiliser les diagrammes de Bode.

a. À partir de l'équation différentielle ou en utilisant les lois d'association des impédances, déterminer la fonction de transfert $\underline{T}=\frac{\underline{I}}{\underline{U}}$ avec $\underline{I}$ et $\underline{U}$ les nombres complexes associés à *i*(*t*) et *u*(*t*).

À partir de l'équation différentielle : la dérivation revient à multiplier par « j*ω* », l'équation différentielle devient : $\underline{U}=R\,\underline{I}+j\,L\,\omega\,\underline{I}$ et en mettant $\underline{I}$ en facteur $\underline{U}=(R+j\,L\,\omega)\,\underline{I}$. L'expression de la fonction de transfert est $\underline{T}=\frac{\underline{I}}{\underline{U}}\frac{1}{(R+j\,L\,\omega)}$

Lois d'association des impédances : les deux dipôles sont en série, l'impédance équivalente est $\underline{Z}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}=R+j\,L\,\omega$ et on retrouve la même expression que précédemment.

Les graphes de la page 4 représentent les diagrammes de Bode pour le module et l'argument de $\underline{T}$ (la fréquence la plus à gauche est 2 Hz et la longueur d'une décade est constante).

b. Déterminer le gain et l'argument pour une fréquence égale à 10 Hz.

Sur le diagramme pour le module, on lit environ -15 dB ; sur celui pour l'argument, on lit environ -69°.

Pour 20 Hz, le gain est égal à -20 dB et l'argument est égal à -78°. La tension d'entrée est une tension de valeur efficace égale à 150 V et de fréquence 20 Hz,

c. Déterminer la valeur efficace du courant.

D'après la définition du décibel $20\log\frac{I}{U}=-20$ soit $\log\frac{I}{U}=-1$ puis $\frac{I}{U}=10^{-1}$ donc $I=10^{-1}U=10^{-1}\times150=15\ \text{A}$

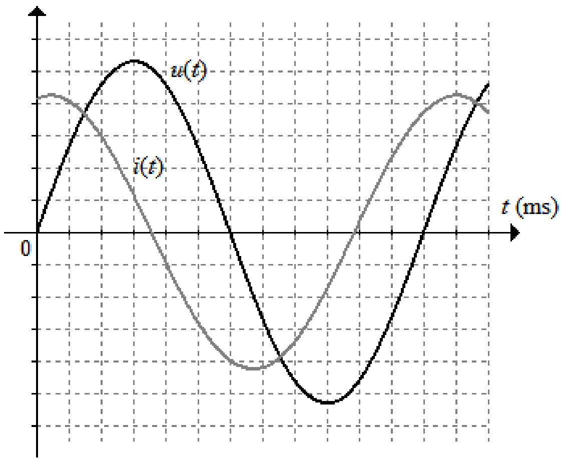
d. Parmi les situations suivantes, indiquer celle qui peut correspondre à la tension et l'intensité (une division verticale correspond à 40 V pour la tension et 5 A pour le courant).

La valeur maximale de la tension est égale à $150\sqrt{2}=212\ \text{V}$ ce qui correspond à 5,3 divisions : les 4 situations peuvent correspondre.

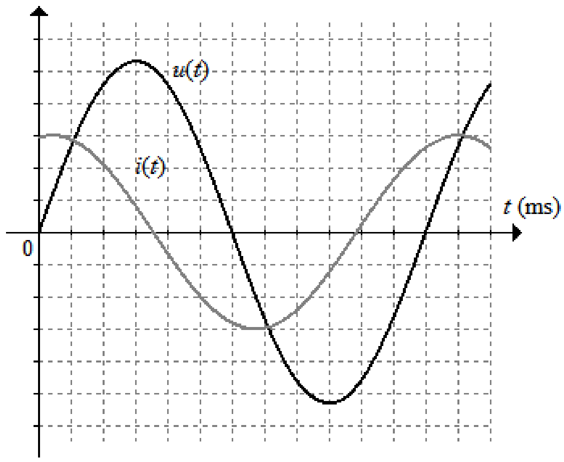
Le courant est en retard de 78° sur la tension ce qui correspond aux situations 3 et 4.

Enfin, la valeur maximale du courant est égale à $15\sqrt{2}=21{,}2\ \text{A}$ ce qui correspond à 4,2 divisions : la situation 4 est la seule à satisfaire toutes les conditions.

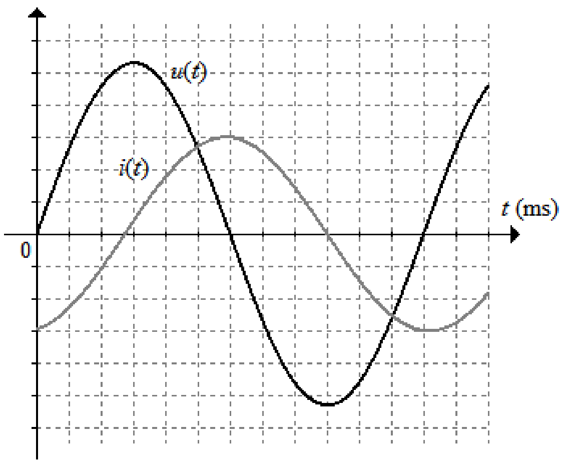
Situation 1



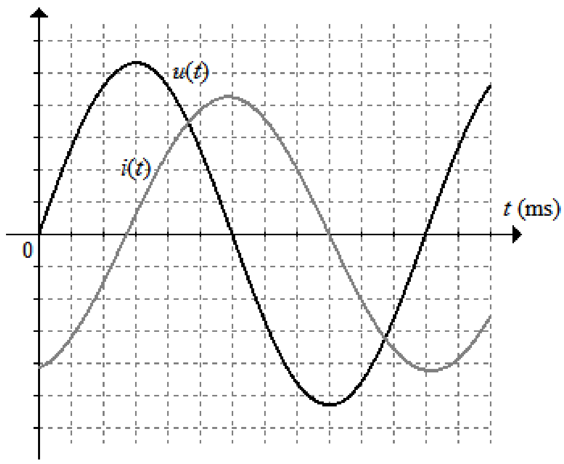
Situation 2



Situation 3



Situation 4

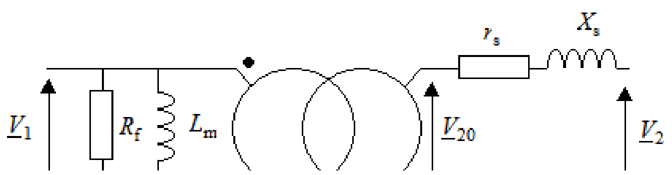


Exercice 3 (6,75 points)

On considère un transformateur monophasé dont les essais préliminaires ont donné :

- à vide : $V_1 = V_{1n} = 230$ V, $I_1 = 0,5$ A, $V_2 = 80$ V, puissance absorbée : 45 W
- en court-circuit : $V_1 = 21$ V, $I_1 = 6,96$ A, puissance absorbée : 130 W

1. Proposer un montage permettant de réaliser les mesures en court-circuit.
2. Déterminer le rapport de transformation et en déduire l'intensité au secondaire pour l'essai en court-circuit.



D'après l'essai à vide $m=\frac{V_2}{V_1}=\frac{80}{230}=0,348$. Puisque $I_2=\frac{1}{m}I_1$ alors $I_2=\frac{1}{0,348}\times 6,96=20$ A

3. Utiliser les résultats de l'essai en court-circuit pour déterminer les valeurs de r_s et X_s (en ohms pour les deux valeurs) en négligeant l'influence de R_f et L_m.

La résistance r_s « consomme » la puissance active de l'essai en court-circuit donc $P_{cc}=r_s I_{2cc}^2$ soit

$$r_s = \frac{P_{cc}}{I_{2cc}^2} = \frac{130}{20^2} = 0{,}325 \ \ \Omega$$

La réactance X_s « consomme » la puissance réactive de l'essai en court-circuit donc $Q_{cc} = X_s I_{2cc}^2$.

On calcule Q_{cc} par $Q_{cc} = \sqrt{S_{cc}^2 - P_{cc}^2} = \sqrt{(V_{1cc} I_{1cc}^2) - P_{cc}^2} = \sqrt{(21 \times 6{,}96^2) - 130^2} = 66{,}8 \text{ var}$ soit $X_s = \frac{Q_{cc}}{I_{2cc}^2} = \frac{66{,}8}{20^2} = 0{,}167 \ \ \Omega$

Pour la suite, le transformateur est supposé parfait pour les courants lorsqu'ils sont proches de leurs valeurs nominales (ce qui revient à supposer que le courant circulant dans l'association R_f et L_m a une intensité nulle) et on prend r_s = 325 mΩ et X_s = 0,170 Ω.

La tension primaire a une valeur efficace de 230 V et une fréquence de 50 Hz, on branche au secondaire une résistance R_c = 5 Ω en série avec une inductance L_c = 11 mH.

4. Représenter le schéma permettant de déterminer l'intensité dans la charge et la tension à ses bornes.

Une source de tension $\underline{V}_{20}$ est connectée à l'association en série de la résistance r_s, la réactance X_s, la résistance R_c et l'inductance L_c.

5. Calculer l'intensité efficace du courant secondaire.

L'impédance équivalente à l'association série de l'impédance secondaire du transformateur (r_s et X_s) et de la charge s'écrit $\underline{Z} = r_s + j X_s + R_c + j X_c$ ($X_c = L_c\omega$) soit $\underline{Z} = r_s + R_c + j(X_s + X_c)$. D'après la loi d'Ohm $\underline{V}_{20} = \underline{Z}\,\underline{I}_2$ d'où $V_{20} = Z I_2$ pour les valeurs efficaces (modules des nombres complexes associés).
Finalement $I_2 = \frac{V_{20}}{(r_s + R_c)^2 + (X_s + X_c)^2} = \frac{80}{\sqrt{(0{,}325 + 5)^2 + (0{,}170 + 11.10^{-3} \times 2\pi \times 50)^2}} = 12{,}4 \text{ A}$

6. Montrer que le déphasage entre l'intensité et la tension au secondaire est égal à 35°.

Il est possible de tracer le diagramme de Fresnel avec les vecteurs associés à l'intensité secondaire et aux tension secondaire, aux bornes de R_c et aux bornes de L_c à l'échelle puis de mesurer l'angle entre les vecteurs associées à la tension et au courant secondaire ou d'utiliser la relation $\tan \varphi_2 = \frac{L_c \omega}{R_c} = \frac{11.10^{-3} \times 2\pi \times 50}{5} = 0{,}691$ qui donne un déphasage de 35° environ.

7. Tracé du diagramme de Fresnel permettant de déterminer la valeur efficace de la tension aux bornes de la charge.

   a. Placer horizontalement le courant secondaire (échelle : 1cm pour 2A).

   b. Placer les vecteurs associés aux tensions aux bornes de r_s et X_s (échelle : 1cm pour 10V).

Modules des vecteurs : $r_s I_2 = 0{,}325 \times 12{,}6 = 4{,}1 \text{ V}$ soit 0,41 cm et $X_s I_2 = 0{,}170 \times 12{,}6 = 2{,}1 \text{ V}$ soit 0,21 cm.

Le vecteur associé à la tension aux bornes de r_s est colinéaire et de même sens que celui associé à l'intensité ; le vecteur associé à la tension aux bornes de X_s est en quadrature avance avec que celui associé à l'intensité.

   c. Tracer l'arc de cercle dont le rayon correspond à la tension secondaire à vide.

Cet arc de cercle a un rayon correspondant à 80 V soit 10 cm, son centre est à l'origine du diagramme (talon du vecteur associé à l'intensité secondaire).

   d. Déduire de ce qui précède la tension secondaire du transformateur.

D'après la loi des mailles $\underline{V}_2 = \underline{V}_{20} + r_s \underline{I}_2 + j X_s \underline{I}_2$. Le vecteur associé à $\underline{V}_2$ commence à l'extrémité de celui associé à et sa pointe est sur le cercle de rayon $\underline{V}_{20}$. La direction du vecteur associé à $\underline{V}_2$ fait un angle de

35° avec le vecteur associé à l'intensité.

8. Placer les vecteur associés à la tension et au courant primaire et en déduire graphiquement le déphasage entre ces deux grandeurs (échelle tension : 1 cm pour 40 V).

Pour trouver $\underline{V}_1$ on utilise la relation $\underline{V}_1=-\frac{1}{m}\underline{V}_{20}$: $\underline{V}_1$ a un module de 230 V (soit 5,75 cm) et est colinéaire et de sens contraire à $\underline{V}_2$.

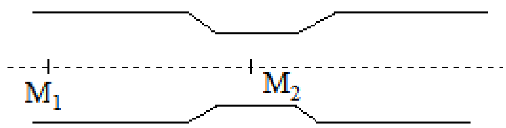
Pour trouver $\underline{I}_1$ on utilise la relation $\underline{I}_1=-m\,\underline{I}_2$ (le transformateur est parfait pour les courants) : $\underline{I}_1$ a un module de 4,38 A (soit 2,2 cm) et est colinéaire et de sens contraire à $\underline{I}_2$.

On trouve graphiquement un déphasage d'environ 34° (angle entre les vecteurs associés à la tension primaire et au courant primaire).

Exercice 4 (3 points)

On considère le système « Venturi » représenté ci-dessous.

Au point M_1, la section est notée S_1, la vitesse du fluide est notée v_1 et la pression statique est notée p_1 ; au point M_2, la section est notée S_2, la vitesse du fluide est notée v_2 et la pression statique est notée p_2.



Relation de Bernoulli pour un fluide parfait : $\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g z_1+p_1=\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g z_2+p_2$

1. Les points M_1 et M_2 étant à la même cote, comment se simplifie la relation de Bernoulli ?

On a $z_1 = z_2$ donc $\frac{1}{2}\rho v_1^2+p_1=\frac{1}{2}\rho v_2^2+p_2$

2. Exprimer la vitesse au point M_2 en fonction de la vitesse au point M_1 et des sections S_1 et S_2.

D'après la relation de continuité : $v_1.S_1=v_2.S_2$ soit $v_2=v_1.\frac{S_1}{S_2}$

3. Montrer que la différence de pression statique entre les points M_2 et M_1 peut s écrire :

$$p_2-p_1=\frac{1}{2}\rho v_1^2[1-(\frac{S_1}{S_2})^2]$$

D'après la question 1 $\frac{1}{2}\rho v_1^2+p_1=\frac{1}{2}\rho v_2^2+p_2$ donc $\frac{1}{2}\rho v_1^2-\frac{1}{2}\rho v_2^2=p_2-p_1$. En factorisant $\frac{1}{2}\rho$ on obtient $\frac{1}{2}\rho(v_1^2-v_2^2)=p_2-p_1$ et en remplaçant v_2 par l'expression trouvée à la question 2, on trouve $\frac{1}{2}\rho(v_1^2-(v_1\frac{S_1}{S_2})^2)=p_2-p_1$. Il reste à mettre v_1 en facteur : $\frac{1}{2}\rho v_1^2(1-(\frac{S_1}{S_2})^2)=p_2-p_1$

4. Déduire de la relation précédente l'expression de la vitesse v_1 en fonction des autres grandeurs.

D'après $\frac{1}{2}\rho v_1^2(1-(\frac{S_1}{S_2})^2)=p_2-p_1$, on a $v_1^2=\frac{2(p_2-p_1)}{\rho(1-(\frac{S_1}{S_2})^2)}$ soit $v_1=\sqrt{\frac{2(p_2-p_1)}{\rho(1-(\frac{S_1}{S_2})^2)}}$ en prenant la racine carrée.

5. Rappeler la relation entre le débit volumique, la section de la canalisation et la vitesse moyenne du fluide.

Relation : $Q=v.S$ avec Q le débit, v la vitesse et S la section de la canalisation.

6. Montrer que le débit dans la canalisation est proportionnel à la différence de pression statique p_2-p_1 entre les points M_2 et M_1.

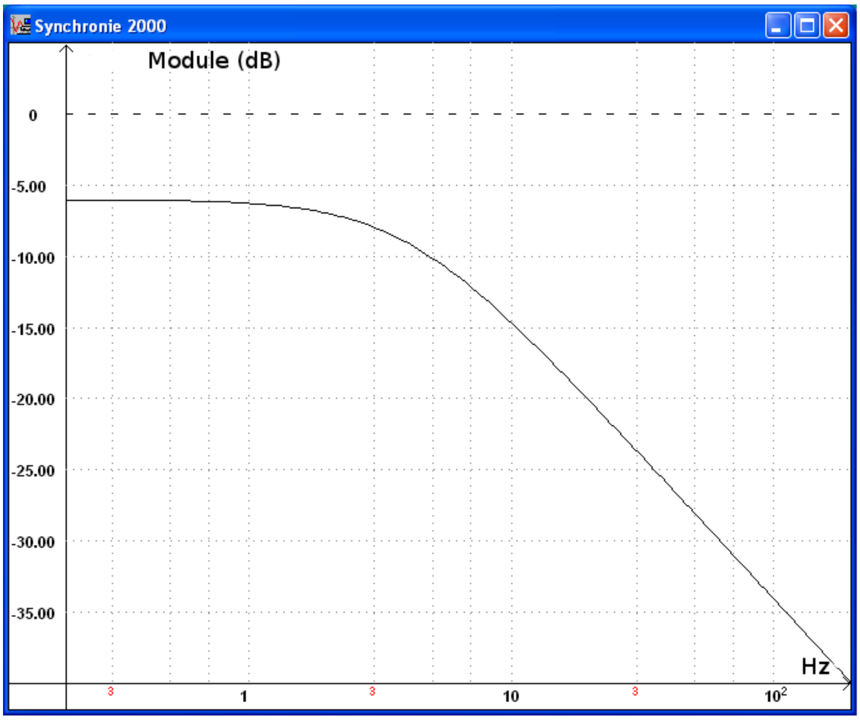
D'après ce qui précède $Q=v_1.S_1$ et $v_1=\sqrt{\frac{2(p_2-p_1)}{\rho(1-(\frac{S_1}{S_2})^2)}}$ donc $Q=S_1\sqrt{\frac{2(p_2-p_1)}{\rho(1-(\frac{S_1}{S_2})^2)}}$

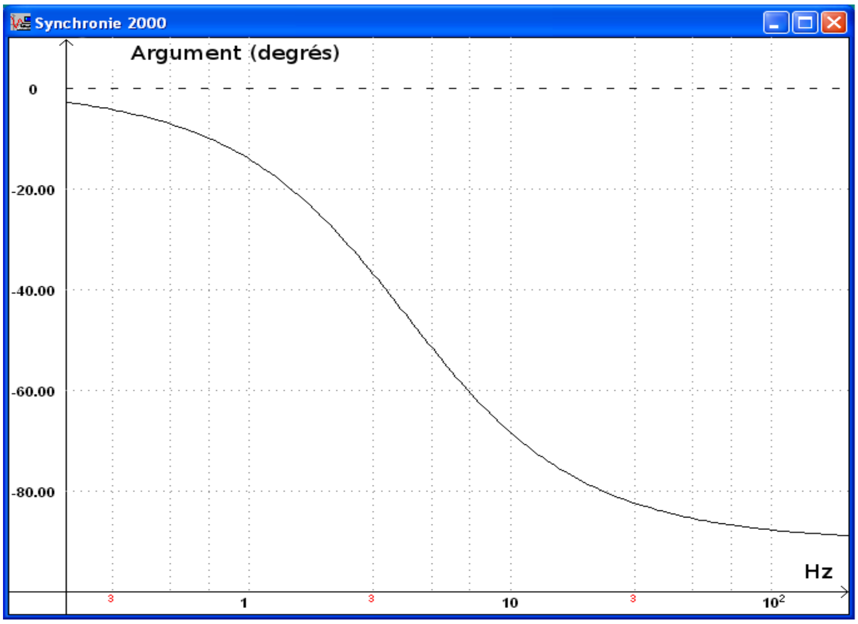
7. La section au point M_2 est égale à 50 cm², celle au point M_1 est égale à 78 cm². Calculer le débit volumique si le fluide est de l'eau (ρ = 1000 kg/m3), et que la différence de pression p_2-p_1 est égale à - 73 Pa.

On utilise la relation précédente :

$$Q=S_1\sqrt{\frac{2(p_2-p_1)}{\rho(1-(\frac{S_1}{S_2})^2)}}=78.10^{-4}\sqrt{\frac{2(-73)}{1000(1-(\frac{78}{50})^2)}}=2{,}48.10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$$

Diagrammes de Bode pour l'exercice 2




Synchronie 2000
Argument (degrés)
0
-20.00
-40.00
-60.00
-80.00
Hz
1
10
10^2